Ejercicios Electrodinámica Cuántica. Capítulo 7

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

19 de mayo de 2023

1. Comprobar que el propagador se puede escribir como

$$K(x_2; x_1) = K_0(x_2; x_1) - i \int K_0(x_2; x_3) V(\vec{x}_3) K(x_3; x_1)\, \mathrm{d}^4 x_3 \tag{1}$$

Sabemos que el propagador K debe cumplir la ecuación

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_2} - (\hat{H}_0(x_2) + \hat{V}(x_2)) \right] K(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = i\delta^{(4)}(x_2 - x_1)$$

Mientras que el propagador K_0 se define como solución a la ecuación

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t_2} - \hat{H}_0(x_2) \right] K_0(\vec{x}_2, t_2; \vec{x}_1, t_1) = i\delta^{(4)}(x_2 - x_1) \tag{2}$$

Donde uso la notación $\hat{A}(x_2)$ para indicar que el operador $\hat{A}$ actúa sobre las funciones que dependen de x_2. Haciendo ahora la derivada respecto de t_2 en (1) obtenemos

$$i\frac{\partial}{\partial t_2} K(x_2; x_1) = i\frac{\partial}{\partial t_2} K_0(x_2; x_1) - i \int i\frac{\partial}{\partial t_2} K_0(x_2; x_3) V(\vec{x}_3) K(x_3; x_1)\, \mathrm{d}^4 x_3$$

Vemos que la derivada solo actúa sobre el propagador libre K_0, por lo que podemos usar la ecuación (2) para reescribir la ecuación sin derivadas;

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t_2} K(x_2; x_1) =& \hat{H}_0 K_0(x_2; x_1) + i\delta^{(4)}(x_2 - x_1) - i\hat{H}_0 \int K_0(x_2; x_3) V(\vec{x}_3) K(x_3; x_1)\, \mathrm{d}^4 x_3 \\ &+ \int \delta^{(4)}(x_2 - x_3) V(\vec{x}_3) K(x_3; x_1)\, \mathrm{d}^4 x_3 \end{aligned}$$

Ordenando los términos e integrando la delta de Dirac podemos reescribirlo ahora como

$$i\frac{\partial}{\partial t_2} K(x_2; x_1) = \hat{H}_0 K_0(x_2; x_1) - i\hat{H}_0 \int K_0(x_2; x_3) V(\vec{x}_3) K(x_3; x_1)\, \mathrm{d}^4 x_3 + \hat{V} K(x_2; x_1) + i\delta^{(4)}(x_2 - x_1)$$

Recuperando la definición (1) podemos escribir finalmente

$$i\frac{\partial}{\partial t_2} K(x_2; x_1) = (\hat{H}_0 + \hat{V}) K(x_2; x_1) + i\delta^{(4)}(x_2 - x_1)$$

Concluyendo la demostración.